# מערכת משוואות ליניאריות

### הגדרה

מערכת – מספר משוואות במקביל. x1 + 2x2+ x3 = 3

ליניאריות – שכל המשתנים בחזקה שווה, בדרך כלל בחזקת אחד. 2x1 + x2 + x3 = -3

### מטריצה

"מטריצה" היא מערכת של משוואות ליניאריות בה רושמים רק את המקדמים של המשתנים בצורת טבלה. "מטריצה מורחבת" היא מטריצה שבה מוסיפים גם את הפתרונות של המשוואות כאשר יש קו המפריד בין המשתנים לפתרונות.

כל שורה מייצגת משוואה, וכל טור מייצג משתנה מסוים לפי הסדר שלו במשוואה. במידה ובאחת המשוואות אין התחשבות במשתנה שיש בשאר המשוואות, נרשום בטור שלו 0.

### גודל המטריצה

כל מטריצה מאופיינת במספר שורות (מספר המשוואות) ובמספר עמודות (מספר המשתנים). מספר השורות מיוצג על יד האות i ומספר העמודות מיוצג על ידי האות j. כשנרצה לציין את גודל המטריצה נרשום כך: Ai,j. למטריצה A יש i שורות ו-j עמודות.

כל איבר במטריצה נקרא "רכיב" או "אלמנט" ומסומן ai,j כלומר שערכו a ונמצא בשורה i בעמודה j. גם ערך אחד יכול להיחשב מטריצה מסדר גודל של 1x1.

### פעולות אלמנטריות של מטריצה

1. כופלים או מחלקים את שני האגפים של שורה במספר שונה מ-0.
2. מוסיפים מכפלה של שורה אחת לשורה אחרת.
3. מחליפים מקומותיהן של שני שורות. ניתן גם להחליף שני טורים, אך אז צריך לסמן איזה משתנה מייצג כל טור.

### איבר מוביל

הוא האיבר הראשון בכל שורה השונה מ-0. יכול להיות מקרה בה לשורה מסוימת אין איבר מוביל, כלומר שכל השורה שווה ל-0.

### מטריצה מדורגת

כדי לפתור את המשוואות ולמצוא את המשתנים, יש "לדרג" את המטריצה. לשם כך צריכים להתקיים שני דברים:

1. כל שורות האפסים אם יש כאלו בתחתית המטריצה.
2. כל איבר מוביל הוא מימין לאיבר מוביל בשורה שמעליו.

לאחר שדירגנו את המטריצה נסתכל על השורות מלמטה למעלה, נחזיר את השורה למצב של משוואה ונמצא את המשתנה של אותה שורה. בכל שורה (מלבד האחרונה) נשתמש בפתרון של השורה הקודמת כדי למצוא את המשתנה.

### מטריצה מדורגת מצומצמת

כדי שתתקיים מטריצה מדורגת מצומצמת צריכים להתקיים 3 תנאים:

1. היא מדורגת, כלומר שכל שורות האפסים למטה וכל איבר מוביל הוא מימין לאיבר מוביל בשורה שמעליו.
2. כל איבר מוביל שווה ל-1.
3. האיבר המוביל הוא האיבר היחיד בעמודה שלו השונה מ-0.

### דרגת המטריצה

הדרגה של מטריצה היא מספר האיברים המובילים (שורות שונות מ-0) במטריצה המדורגת.

אם לדוגמא במטריצה A יש שלוש שורות שונות מ-אפס נאמר שהדרגה של מטריצה A היא שלוש, או rankA = 3.

### סוגי פתרונות

למערכת משוואות ליניאריות יכולים להיות שלושה סוגי פתרונות: פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אין פתרון.

**פתרון יחיד** - מתקבל כאשר דרגת המטריצה שווה למספר המשתנים.

**אינסוף פתרונות** - מתקבל כאשר הדרגה של המטריצה קטנה ממספר המשתנים. יכולים להיות שני מקרים:

1. במערכת המשוואות מלכתחילה מספר המשתנים גדול ממספר המשוואות, ואז נאמר שאחד המשתנים הוא "חופשי", כלומר יש לו אינסוף פתרונות.
2. מספר המשוואות שווה למספר המשתנים, אך במטריצה המדורגת קיבלנו שורת אפסים. במקרה זה אם גם התוצאה של שורה זו שווה ל-0 נאמר שיש אינסוף פתרונות.

**אין פתרון** – מתקבל כאשר יש שורת אפסים בה התוצאה שונה מ-0.

מערכת משוואות עם פרמטרים

במשוואות שנקבל בדרך כלל יהיה פרמטר אחד לפחות, וישאלו אותנו לאילו ערכים של הפרמטר יתקבלו: פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, ואין פתרון. נשתמש בכללים בסעיף קודם כדי לענות על כך.

### מערכת הומוגנית

התוצאה של כל המשוואות שווה ל-0. במקרה זה לא יכול להיות מצב של "אין פתרון".

### פתרון טריוויאלי

כלומר שהפתרון של כל המשתנים במטריצה הוא 0.

# מטריצות

## חיבור מטריצות וכפל בסקלר

סכום של שתי מטריצות היא מטריצה שכל איבר בה הוא חיבור של שני האיברים משני המטריצות בהתאמה. לדוגמא: בחיבור המטריצות A ו-B האיבר הראשון יהיה AB1,1 = A1,1 + B1,1 וכן הלאה בכל האיברים.

מובן מדוע אם כן, ניתן לחבר רק שתי מטריצות שהן מאותו סדר גודל. חיבור מטריצות מסדר גודל שונה אינו מוגדר.

### כפל מטריצה בסקלר

כשכופלים מטריצה בסקלר מקבלים מטריצה שכל רכיביה מוכפלים באותו סקלר בנפרד.

### תכונות של חיבור מטריצות

תהי V קבוצת כל המטריצות מסדר m×n . לכל שלוש מטריצות A, B, C ∈ V ולכל סקלר k ∈ 𝐑

מתקיים:

א. חוק החילוף (קומוטוטיביות) - A + B = B + A

ב. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) - (A + B) + C = A + (B + C )

ג. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות) - k (A + B) = kA + kB

ד. A + (−A) = 0

## כפל מטריצות

כדי לכפול מטריצות צריך שמספר השורות של המוכפל יהיה שווה למספר העמודות של המטריצה שמכפילים בה. המטריצה שתתקבל תהיה עם מספר העמודות של המוכפל ועם מספר השורות של המכפיל.

כך לדוגמא: בכפולה של מטריצה Ai,j ב-Bm,n צריך להתקיים j=m, והמטריצה שתתקבל תהיה מסדר גודל של i x n. (כאשר:j = m ) Ai,j x Bm,n = ABi,n

### סדר הכפלת מטריצות

מכפילים את כל האיברים בשורה i של A בכל האיברים בעמודה n של B בהתאמה, סכום כל האיברים שיתקבלו יהיה האיבר במקום ABi,n . כך נעבור כל שורה של A שאנו מכפילים אותו בכל העמודות של B וממלאים את המטריצה AB.

### תכונות של כפל מטריצות

1. בכפל מטריצות A x B לא בהכרח שווה ל- B x A לכן חשוב לשים לב מי המוכפל ובמי מכפילים.
2. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) - (AB)C = A(BC). סדר ההכפלה לא חשוב כל עוד לא משנים מיקום.
3. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות) - A(B + C) = AB + AC

**צריך לשים לב לסדר ההכפלה!!** (B + C)A = BA + CA

## סוגי מטריצות

### מטריצת ה-0

מטריצה שבה כל הערכים שווים ל-0.

### מטריצה ריבועית

מטריצה שבה מספר השורות ( i ) שווה למספר העמודות ( j ). כלומר מטריצה מסדר n x n.

### מטריצה אלכסונית

מטריצה ריבועית שכל איבריה חוץ מאלכסון ראשי שווים ל-0. במטריצה זו מתקיים: Ai,j = 0 לכל i שונה מ-j.

|  |  |
| --- | --- |
| 0 | an |
| bn | 0 |

תכונות מטריצה אלכסונית: כשמעלים מטריצה אלכסונית A בחזקת n, מקבלים מטריצה אלכסונית שכל איבר באלכסון ראשי הוא בחזקת n. An =

### מטריצה משולשת

מטריצה שבה כל האיברים מעל\מתחת לאלכסון ראשי שווה ל-0.

אם כל האיברים מתחת אלכסון ראשי שווים ל-0 אז נאמר שהיא "מטריצה משולשת תחתונה", ומתקיים: ai,j = 0 לכל i > j. שזה במילים אחרות מטריצה מדורגת.

אם כל האיברים מעל אלכסון ראשי שווים ל-0 אז נאמר שהיא "מטריצה משולשת עליונה", ומתקיים: ai,j = 0 לכל i < j.

### מטריצת היחידה

מטריצה ריבועית ואלכסונית שכל רכיביה שווים ל-0 מלבד אלכסון ראשי שכל רכיביו שווים ל-1. מטריצה זו מסומנת באות גדולה I.

אם נכפיל מטריצה ריבועית במטריצת היחידה מאותו גודל, התוצאה תהיה אותה מטריצה בדיוק, כמו להכפיל מספר ב-1. במילים אחרות, מטריצת היחידה ניטרלית לכפל. A x I = I x A = A

### מטריצה משוחלפת

היא מטריצה שבה כל שורה הופכת להיות עמודה ואילו כל עמודה הופכת להיות שורה. כלומר ש: Ai,j = Aj,i. מטריצה משוחלפת מסומנת באמצעות האות t מעל שם המטריצה שהוא קיצור של המילה transpose (שחלוף) - At.

אם מטריצה A היא מסדר גודל של m x n אז המטריצה At היא מסדר גודל של n x m.

תכונות של מטריצה משוחלפת:

תהיינה A ו-B מטריצות ויהי k ∈ 𝐑 סקלר. אז מתקיים:

א. (A+B)t = At + Bt

ב. (At)t = A

ג. (kA)t = kAt

ד. (A x B)t = Bt x At כלומר (A x B)t ≠ At x Bt. בהכפלת מטריצות משוחלפות יש להחליף

את הסדר.

### מטריצה סימטרית

מטריצה משוחלפת ששווה למטריצת המקור.

### מטריצה אנטי סימטרית

מטריצה סימטרית, אלא שבכל האיברים השונים מ-0 פלוס הופך למינוס ומינוס הופך לפלוס.

## מושגים

### שוויון מטריצות

שתי מטריצות A, B נקראות שוות כלומר B = A אם הן מאותו סדר ואם כל רכיביהן שווים בהתאמה.

### אלכסון ראשי

הוא כל האיברים של המטריצה שבהן מספר השורה שווה למספר העמודה. אלכסון ראשי של מטריצה קיים בכל סוגי המטריצה גם אלו שאינם ריבועיות. ai,j כאשר i = j.

### עקבה (trace)

עקבה (trace) של מטריצה הוא סכום האיברים של האלכסון הראשי.

חוקים:

tr(A + B) = tr(A) + tr(B).

tr(A∙B) = tr(B∙A).

# מטריצה הפיכה והופכית

### הגדרה

מטריצה ריבועית A תקרא "מטריצה הפיכה" אם קיימת A-1 (הסימון למטריצה הופכית) כך שמכפלתם שווה למטריצת היחידה A x A-1 = I. אם תנאי זה מתקיים נאמר שמטריצה A היא מטריצה הפיכה, והמטריצה A-1 היא המטריצה ההופכית שלה. כמו כן מתקיים: A-1 x A = I.

לא כל מטריצה היא הפיכה, מטריצה שאינה הפיכה נקראת "מטריצה בלתי הפיכה" או "מטריצה סינגולרית". מטריצה הפיכה נקראת גם "מטריצה רגולרית".

לכל מטריצה הפיכה יש מטריצה הופכית אחת בלבד. לכן אם מתקיים: A x B = I וגם A x C = I, אז בהכרח B = C.

### מציאת מטריצה הופכית – שיטה 1[[1]](#footnote-1)

בונים מטריצה חדשה שמצד שמאל נמצאת מטריצה A, ומצד ימין מטריצת היחידה מאותו סדר גודל [ A | I ]. מדרגים אותה עד ש-A הופכת להיות מטריצת היחידה. המטריצה שתתקבל בצד ימין היא המטריצה ההופכית, וכך נוכל לקבוע כי מטריצה A היא מטריצה הפיכה.

אם לא הצלחנו לקבל את מטריצת היחידה על ידי דירוג אלא קיבלנו שורת אפסים במקום, נאמר שמטריצה A היא מטריצה בלתי הפיכה.

|  |  |
| --- | --- |
| b | a |
| d | c |

### מציאת מטריצה הופכית – שיטה 2

במטריצה מסדר גודל של 2 x 2 שנראית כך A =. אפשר להשתמש בנוסחה של כפל מטריצה בסקלר:

|  |  |
| --- | --- |
| -b | d |
| a | c- |

A-1 = 1 / (ad – bc) ∙

בתנאי שמתקיים: ad - bc ≠ 0 , אחרת ל-A אין מטריצה הופכית.

הערה - דרך נוספת לדעת אם מטריצה A היא הפיכה או לא היא דרך הדטרמיננטה של המטריצה. אם הדטרמיננטה שונה מ-0 המטריצה A הפיכה, ואם שווה ל-0 המטריצה A היא בלתי הפיכה.

### שימוש במטריצה הופכית

באמצעות המטריצה ההופכית ניתן למצוא פתרון של מערכת משוואות של המטריצה ההפיכה בצורה קלה. באמצעות הנוסחה A ∙ X = b כאשר A היא המטריצה ההפיכה, X הוא וקטור המשתנים (x1, x2, x3 וכו'), ו-b הוא וקטור הפתרונות של מטריצה A.

אם ידועה לנו המטריצה ההופכית נוכל להכפיל בה את הנוסחה בשני הצדדים מצד **שמאל** שלה ונקבל: A-1 ∙ A ∙ X = A-1 ∙ b. מכיוון שהביטוי בצהוב הוא בעצם מטריצת היחידה שהיא ניטרלית לכפל נקבל: **X = A-1** ∙ **b**. כעת, אם נכפיל את המטריצה ההופכית בוקטור הפתרונות, נקבל וקטור חדש שערכיו הם פתרונות המשוואה. לסיום, יש להציב את הפתרונות שקיבלנו במערכת המשוואות לוודא שהיא נכונה.

### תכונות מטריצה הפיכה והופכית

1. אם מתקיים A ∙ B = I אז גם מתקיים B ∙ A = I.
2. שתי מטריצות הפיכות מאותו גודל גם המכפלה שלהם הפיכה ותקיים: (A ∙ B)-1 = A-1 ∙ B-1.

ואילו מטריצה בלתי הפיכה גם המכפלה שלה בכל מטריצה אחרת היא בלתי הפיכה.

1. מטריצה הופכית של מטריצה סימטרית גם היא סימטרית.

### מציאת מטריצה במכפלה

בדומה לתהליך מציאת מטריצה הופכית, ניתן למצוא כל מטריצה המוכפלת במטריצה אם נתונה לנו אחת המטריצות ואת המטריצה המתקבלת ממכפלתם.

כך לדוגמא: אם ידועה לנו מטריצה A ומטריצה AB נוכל למצוא את מטריצה B על ידי שנבנה מטריצה חדשה [ A | AB ]. נדרג את A עד שנקבל את מטריצת היחידה. המטריצה שתתקבל בצד שמאל תהיה מטריצה B.

לסיום, נעשה בדיקה על יד הכפלת מטריצה A במטריצה B לוודא שאכן מקבלים את מטריצה AB.

# דטרמיננטות

## הגדרה

דטרמיננטה של מטריצה היא מספר יחיד המחושב מאיברי המטריצה ומכיל מידע שימושי על המטריצה. למשל, ניתן להסיק מתוך הדטרמיננטה האם המטריצה הפיכה או לא.

דטרמיננטה מוגדרת רק עבור מטריצות ריבועיות. דטרמיננטה של מטריצה A תסומן: |A| או det(A).

## חישוב דטרמיננטה

### מטריצה בגודל 2 x 2

מכפילים את שני האיברים באלכסון ראשי ומחסירים ממנו את המכפלה של האלכסון המשני. המספר שנקבל הוא הדטרמיננטה של מטריצה מסדר גודל של 2 x 2.

### מטריצה הגדולה מ 2 x 2

במטריצה זו נשתמש בטכניקה הנקראת "פיתוח לפי מינורים". נבחר או שורה או עמודה כלשהי במטריצה, לא משנה איזה, בכל פעם ניקח את המספר הראשון מאותה שורה או עמודה, נחסיר את העמודה והשורה שהמספר הראשון נמצא בה. המטריצה שנשארה נקראת "מינור Mi,j של "ai,j (המספר שבחרנו), אותה נכפיל במספר הראשון. כך נעשה בכל המספרים בשורה או עמודה שבחרנו בהתחלה. את סימני החיבור / חיסור קובעים על ידי חלוקה של המטריצה לסירוגין כאשר a1,1 הוא חיובי, וכן הלאה.

במטריצות הגדולות מ 3 x 3 יש לעשות פיתוח לפי שורה מספר פעמים עד שמגיעים למכפלה של מטריצה מסדר גודל של 2 x 2 אותה אנו יודעים לחשב. כדי להקל על החישובים נרצה תמיד לבחור שורה או עמודה שיש בה כמה שיותר אפסים.

כמו שנראה בסעיף הבא, ישנם פעולות על המטריצה שאינם משפיעות על הדטרמיננטה כלל. כאשר אנו מחשבים דטרמיננטה בדרך כלל נרצה להשתמש בפעולות אלו כדי לפשט את החישוב. במידה והשתמשנו בפעולה שמשנה את ערך הדטרמיננטה, יש לציין זאת, ובסוף להתחשב בשינוי זה כדי למצוא את הדטרמיננטה המקורית.

### סכום פרמוטציות

שיטה נוספת שלא כל כך שימושית, היא לסכום את כל "הפרמוטציות" במטריצה A מסדר גודל nxn. הפרמוטציות במטריצה הם כל הצירופים הקיימים שבהם ניתן לבחור n איברים כאשר כל איבר שבוחרים הוא היחיד בשורה ובעמודה שהוא נמצא. בכל מטריצה מסדר גודל nxn יש n! פרמוטציות (במטריצה עם 5 משתנים יש 120 פרמוטציות! לכן שיטה זו לא כל כך שימושית). הסימון החיובי או השלילי של כל פרמוטציה יהיה לפי מספר "הפיכות הסדר" שיש בה. הפיכת סדר פירושה מספר הפעמים שיש בפרמוטציה איבר שהוא משמאל ונמוך מאיבר אחר. אם מספר הפיכות הסדר זוגי הפרמוטציה חיובית ואם אי זוגי הפרמוטציה שלילית.

## פעולות במטריצות והשפעה על דטרמיננטה

|  |  |
| --- | --- |
| **פעולה** | **השפעה על |A|** |
| החלפת מקומותיהן של שתי שורות או שתי עמודות | |A|- |
| מכפילים שורה או עמודה במספר קבוע k | k x |A| |
| מוסיפים מכפלה של שורה או עמודה לשורה או עמודה אחרת.  **הערה - במטריצה רגילה ניתן לבצע פעולה זו רק על שורות, אך בדטרמיננטה ניתן לעשות זאת גם על עמודות.** | |A| |
| הכפלה של כל המטריצה במספר קבוע k | kn x |A| |

## חישוב דטרמיננטות במטריצות מיוחדות

במטריצה משולשת הדטרמיננטה שווה למכפלה של כל האיברים באלכסון הראשי.

## דטרמיננטה שונה מ-0

במטריצה שבה הדטרמיננטה שונה מ-0 יתקיימו כל הכללים הבאים:

1. המטריצה הפיכה ויש לה מטריצה הופכית.
2. למטריצה יש פתרון יחיד.
3. דרגת המטריצה שווה למספר המשתנים, כלומר אין שורות אפסים.

## דטרמיננטה השווה ל-0

כאשר שורה או עמודה היא מכפלה של שורה או עמודה אחרת במטריצה, הדטרמיננטה של אותה מטריצה תהיה שווה ל-0. וכן אם במטריצה יש שורה או עמודה של אפסים גם כן הדטרמיננטה תהיה שווה ל-0. |A| = 0.

במטריצה שבה הדטרמיננטה שונה מ-0 יתקיימו כל הכללים הבאים:

1. המטריצה לא הפיכה ואין לה מטריצה הופכית.
2. למטריצה אין פתרון יחיד אלא יש או אינסוף פתרונות או אין פתרון.
3. דרגת המטריצה קטנה ממספר המשתנים.

## תכונות של דטרמיננטה

1. det(A) = det(At) - דטרמיננטה של מטריצה שווה לדטרמיננטה של המטריצה המשוחלפת שלה.
2. det(A ∙ B) = det(A) ∙ det(B) - דטרמיננטה של מכפלת מטריצות שווה לכפולה של הדטרמיננטות שלהם לחוד.
3. det(𝛼 ∙ A) = 𝛼n ∙ det(A) - דטרמיננטה של מכפלת מטריצה בסקלר שווה לסקלר בחזקת גודל המטריצה כפול הדטרמיננטה של המטריצה.
4. det(An) = (det(A))n - דטרמיננטה של חזקה של מטריצה שווה לחזקה של הדטרמיננטה.
5. det(A-1) = 1/det(A) - אחד חלקי דטרמיננטה של מטריצה שווה לדטרמיננטה של ההופכית שלה.
6. det(I) = 1 - דטרמיננטה של מטריצת היחידה שווה ל-1.
7. det(A) ∙ det(A-1) = 1 - כפולה של דטרמיננטה של מטריצה בהופכית שלה שווה ל-1.
8. דטרמיננטה של מטריצות דומות שוות.

## כלל קרמר

### הגדרה

אם A היא מטריצה ריבועית שהדטרמיננטה שלה שונה מ-0, אז ניתן למצוא את הפתרונות של המשתנים (x1, x2, x3 וכו') באמצעות הנוסחה Xi = |Ai| / |A|. כאשר Xi הוא כל פעם משתנה אחר, |Ai| הוא הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת על ידי החלפת העמודה במקום ה-i בוקטור הפתרונות b של המטריצה, ו-|A| הוא הדטרמיננטה של המטריצה הרגילה A.

למערכת המשוואות ההומוגנית A ∙ X = 0, יש פתרון שונה מאפס אם ורק אם |A| = 0.

### מציאת איבר במטריצה הופכית

אחת מהשאלות שיכולים לשאול אותנו היא מהו האיבר ai,j במטריצה ?A-1 כלומר למצוא איבר ספציפי במטריצה ההופכית. באמצעות כלל קרמר ניתן לעשות זאת.

נסתכל על המשוואה A ∙ A-1 = I, אפשר להסתכל על משוואה זו בצורה שונה, A ∙ A-1j = Ij, כלומר מטריצה A כפול הוקטור בעמודה j במטריצה ההופכית שווה לוקטור המקביל בעמודה ה-j במטריצת היחידה.

במצב זה אנו יכולים להשתמש בכלל קרמר Xi = |Ai| / |A|. כאשר Xi הוא האיבר הספציפי אותו אנו מחפשים, |Ai| הוא הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת על ידי החלפת העמודה של מטריצה A במקום ה-i בוקטור Ij של מטריצת היחידה, ו-|A| הוא הדטרמיננטה של המטריצה הרגילה A.

## מטריצה מצורפת

תהי A מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n. אזי המטריצה המצורפת של A, אותה נסמן adj(A) (מהמילה adjoint), גם היא מטריצה ריבועית מאותו גודל, כך שכל איבר בה ai,j מחושב לפי הדטרמיננטה של המינור Mj,i במטריצה A, הסימון חיובי או שלילי נקבע לפי (-1)i+j. במילים אחרות, לכל איבר בadj(A)- הנמצא בשורה i ועמודה j נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה A ללא השורה j והעמודה i. כך נעשה לכל האיברים. Adj(A)i,j = (-1)i+j∙det(Mj,i)

### שימוש במטריצה מצורפת

1. לכל מטריצה A מתקיים: A∙adj(A) = det(A)∙I.
2. מהמשפט הקודם ניתן לחשב מטריצה הופכית A-1 כך: A-1 = [1/det(A)]∙adj(A) .

1. יש עוד שני שיטות נוספות שנלמד בהמשך למציאת מטריצה הופכית שיטה ראשונה נלמד בפרק על דטרמיננטות, ושיטה שנייה בלינארית 2 באמצעות משפט קיילי – המילטון. [↑](#footnote-ref-1)